UNIDAD II

UNIDAD II

2 CINEMATICA.

La **Cinemática** (del griego *κινεω*, *kineo*, movimiento) es la rama de la mecánica clásica que estudia las leyes del movimiento de los cuerpos sin tener en cuenta las causas que lo producen, limitándose, esencialmente, al estudio de la trayectoria en función del tiempo.

En la Cinemática se utiliza un sistema de coordenadas para describir las trayectorias, denominado sistema de referencia. La velocidad es el ritmo con que cambia la posición un cuerpo. La aceleración es el ritmo con que cambia su velocidad. La velocidad y la aceleración son las dos principales cantidades que describen cómo cambia su posición en función del tiempo.

Existen 4 movimientos principales:

Movimiento rectilíneo.

Movimiento circular.

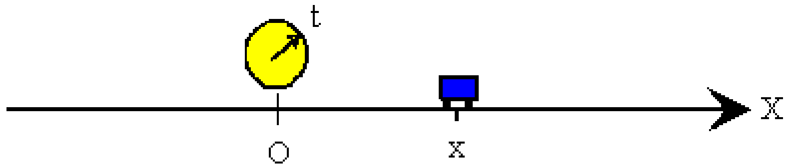
Movimiento curvilíneo.

Movimiento relativo.

2.1 MOVIMIENTO RECTILINEO.

Movimiento rectilíneo

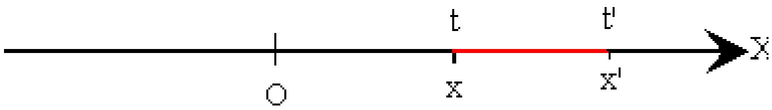
Se denomina movimiento rectilíneo, aquél cuya trayectoria es una línea recta.



En la recta situamos un origen O, donde estará un observador que medirá la posición del móvil *x* en el instante *t*. Las posiciones serán positivas si el móvil está a la derecha del origen y negativas si está a la izquierda del origen.

Posición

La posición *x* del móvil se puede relacionar con el tiempo *t* mediante una función *x=f(t)*.



Desplazamiento

Supongamos ahora que en el tiempo *t*, el móvil se encuentra en posición *x*, más tarde, en el instante *t'* el móvil se encontrará en la posición *x'*. Decimos que móvil se ha desplazado $\Delta x=x'-x$ en el intervalo de tiempo D*t*=*t'*-*t*, medido desde el instante *t* al instante *t'*.

Velocidad

La velocidad media entre los instantes *t* y *t'* está definida por

$$\langle v \rangle = \frac{x'-x}{t'-t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Para determinar la velocidad en el instante *t*, debemos hacer el intervalo de tiempo Δt tan pequeño como sea posible, en el límite cuando Δt tiende a cero.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Pero dicho límite, es la definición de derivada de *x* con respecto del tiempo *t*.

Para comprender mejor el concepto de velocidad media, resolvemos el siguiente ejercicio

Ejercicio

Una partícula se mueve a lo largo del eje X, de manera que su posición en cualquier instante *t* está dada por $x=5\cdot t^2+1$, donde *x* se expresa en metros y *t* en segundos.

Calcular su velocidad promedio en el intervalo de tiempo entre:

- 2 y 3 s.
- 2 y 2.1 s.
- 2 y 2.01 s.
- 2 y 2.001 s.
- 2 y 2.0001 s.
- Calcula la velocidad en el instante t=2 s.

En el instante t=2 s, x=21 m				
t' (s)	x' (m)	$\Delta x=x'-x$	$\Delta t=t'-t$	$<v>=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ m/s
3	46	25	1	25
2.1	23.05	2.05	0.1	20.5
2.01	21.2005	0.2005	0.01	20.05
2.001	21.020005	0.020005	0.001	20.005
2.0001	21.00200005	0.00200005	0.0001	20.0005
...	...	...	...	...
			0	20

Como podemos apreciar en la tabla, cuando el intervalo $\Delta t \to 0$, la velocidad media tiende a 20 m/s. La velocidad en el instante t=2 s es una velocidad media calculada en un intervalo de tiempo que tiende a cero.

Calculamos la velocidad en cualquier instante t

- La posición del móvil en el instante t es $x=5t^2+1$
- La posición del móvil en el instante $t+\Delta t$ es $x'=5(t+\Delta t)^2+1=5t^2+10t\Delta t+5\Delta t^2+1$
- El desplazamiento es $\Delta x=x'-x=10t\Delta t+5\Delta t^2$
- La velocidad media $<v>$ es

$$<v>=\frac{10t\cdot\Delta t+5\Delta t^2}{\Delta t}=10t+5\Delta t$$

La velocidad en el instante t es el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}<v>=\lim_{\Delta t\to 0}\left(10t+5\Delta t\right)=10t \text{ m/s}$$

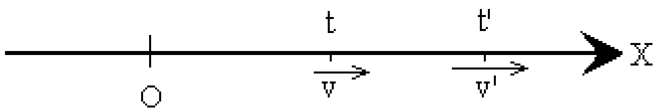
La velocidad en un instante t se puede calcular directamente, hallando la derivada de la posición x respecto del tiempo.

$$x = 5t^2 + 1 \text{ m}$$
$$v = \frac{dx}{dt} = 10t \text{ m/s}$$

En el instante t=2 s, v=20 m/s

2.2 MOVIMIENTO BAJO ACELERACION CONSTANTE.

Aceleración



En general, la velocidad de un cuerpo es una función del tiempo. Supongamos que en un instante t la velocidad del móvil es v, y en el instante t' la velocidad del móvil es v'. Se denomina aceleración media entre los instantes t y t' al cociente entre el cambio de velocidad $\Delta v=v'-v$ y el intervalo de tiempo en el que se ha tardado en efectuar dicho cambio, $\Delta t=t'-t$.

$$\langle a \rangle = \frac{v'-v}{t'-t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

La aceleración en el instante t es el límite de la aceleración media cuando el intervalo Δt tiende a cero, que es la definición de la derivada de v.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Ejemplo:

Un cuerpo se mueve a lo largo de una línea recta $x=2t^3-4t^2+5$ m. Hallar la expresión de

- La velocidad
- La aceleración del móvil en función del tiempo.

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 8t \quad \text{m/s}$$

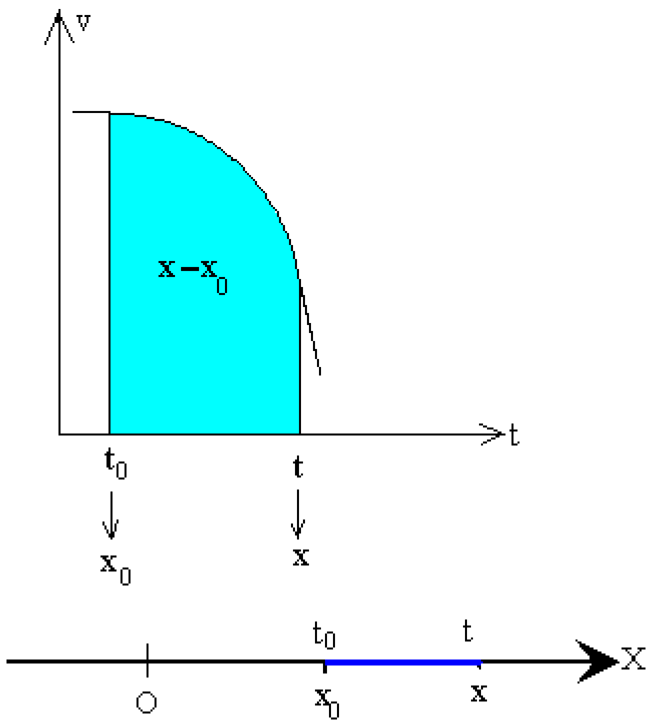
$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 8 \quad \text{m/s}^2$$

Dada la velocidad del móvil hallar el desplazamiento

Si conocemos un registro de la velocidad podemos calcular el desplazamiento x-x_0 del móvil entre los instantes t_0 y t, mediante la integral definida.

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v \cdot dt$$

El producto $v\ dt$ representa el desplazamiento del móvil entre los instantes t y $t + dt$, o en el intervalo dt. El desplazamiento total es la suma de los infinitos desplazamientos infinitesimales entre los instantes t_0 y t.



En la figura, se muestra una gráfica de la velocidad en función del tiempo, el área en color azul mide el desplazamiento total del móvil entre los instantes t_0 y t, el segmento en color azul marcado en la trayectoria recta.

Hallamos la posición x del móvil en el instante t, sumando la posición inicial x_0 al desplazamiento, calculado mediante la medida del área bajo la curva v-t o mediante cálculo de la integral definida en la fórmula anterior.

Ejemplo:

Un cuerpo se mueve a lo largo de una línea recta de acuerdo a la ley $v=t^3-4t^2+5$ m/s. Si en el instante $t_0=2$ s. está situado en $x_0=4$ m del origen. Calcular la posición x del móvil en cualquier instante.

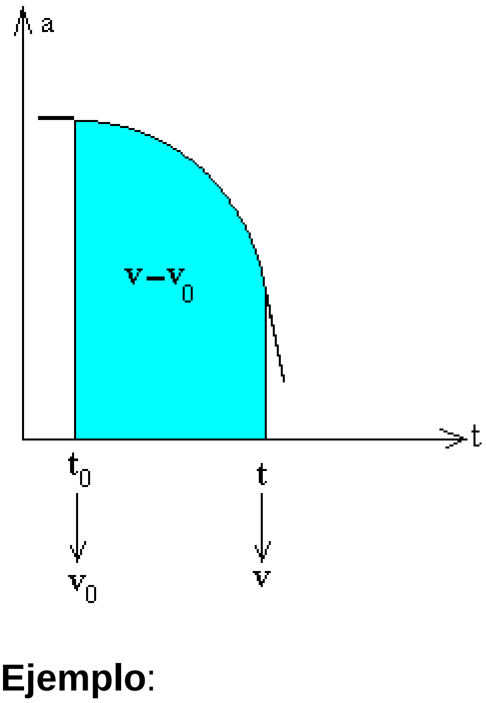
$$x-4=\int_2^t (t^3-4t^2+5)dt$$

$$x=\frac{t^4}{4}-\frac{4t^3}{3}+5t+\frac{2}{3} \quad \text{m}$$

Dada la aceleración del móvil hallar el cambio de velocidad

Del mismo modo, que hemos calculado el desplazamiento del móvil entre los instantes t_0 y t, a partir de un registro de la velocidad v en función del tiempo t, podemos calcular el cambio de velocidad $v-v_0$ que experimenta el móvil entre dichos instantes, a partir de un registro de la aceleración en función del tiempo.

$$v-v_0=\int_{t_0}^{t} a\cdot dt$$



En la figura, el cambio de velocidad $v-v_0$ es el área bajo la curva a-t, o el valor numérico de la integral definida en la fórmula anterior.

Conociendo el cambio de velocidad $v-v_0$, y el valor inicial v_0 en el instante t_0, podemos calcular la velocidad v en el instante t.

Ejemplo:

La aceleración de un cuerpo que se mueve a lo largo de una línea recta viene dada por la expresión. $a=4-t^2$ m/s^2. Sabiendo que en el instante $t_0=3$ s, la velocidad del móvil vale $v_0=2$ m/s. Determinar la expresión de la velocidad del móvil en cualquier instante

$$v - 2 = \int_3^t (4 - t^2)\,dt$$

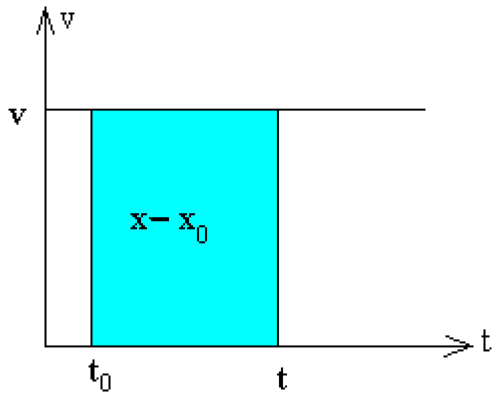
$$v = 4t - \frac{t^3}{3} - 1 \text{ m/s}$$

Resumiendo, las fórmulas empleadas para resolver problemas de movimiento rectilíneo son

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v\,dt \qquad v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a\,dt$$

Movimiento rectilíneo uniforme



Un movimiento rectilíneo uniforme es aquél cuya velocidad es constante, por tanto, la aceleración es cero. La posición *x* del móvil en el instante *t* lo podemos calcular integrando

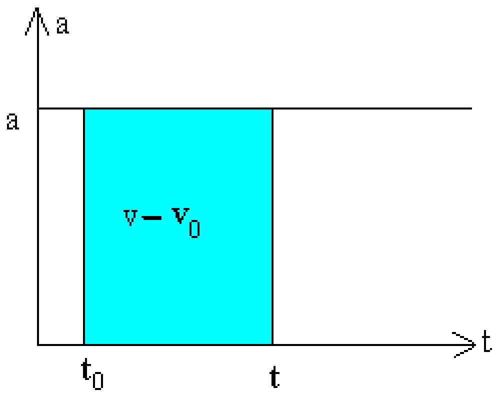
$$x - x_0 = v \cdot (t - t_0)$$

o gráficamente, en la representación de *v* en función de *t*.

Habitualmente, el instante inicial t_0 se toma como cero, por lo que las ecuaciones del movimiento uniforme resultan

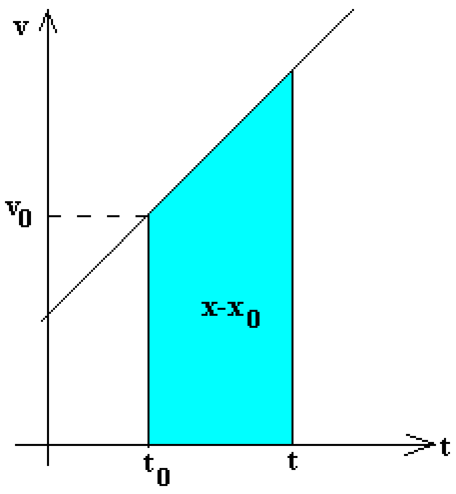
$$a = 0$$
$$v = cte$$
$$x = x_0 + v \cdot t$$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado



Un movimiento uniformemente acelerado es aquél cuya aceleración es constante. Dada la aceleración podemos obtener el cambio de velocidad v-v_0 entre los instantes t_0 y t, mediante integración, o gráficamente.

$$v - v_0 = a \cdot (t - t_0)$$



Dada la velocidad en función del tiempo, obtenemos el desplazamiento x-x_0 del móvil entre los instantes t_0 y t, gráficamente (área de un rectángulo + área de un triángulo), o integrando

$$x - x_0 = v_0 \cdot (t - t_0) + \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2$$

Habitualmente, el instante inicial t_0 se toma como cero, quedando las fórmulas del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, las siguientes.

$$a = \text{cte}$$
$$v = v_0 + a \cdot t$$
$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

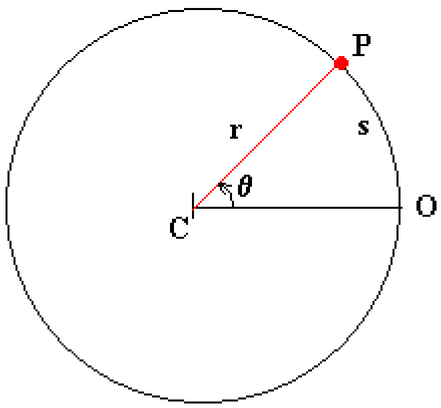
Despejando el tiempo t en la segunda ecuación y sustituyéndola en la tercera, relacionamos la velocidad v con el desplazamiento x-x_0

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

2.3 MOVIMIENTO CIRCULAR

En esta sección, vamos a definir las magnitudes características de un movimiento circular, análogas a las ya definidas para el movimiento rectilíneo.

Se define movimiento circular como aquél cuya trayectoria es una circunferencia. Una vez situado el origen O de ángulos describimos el movimiento circular mediante las siguientes magnitudes.

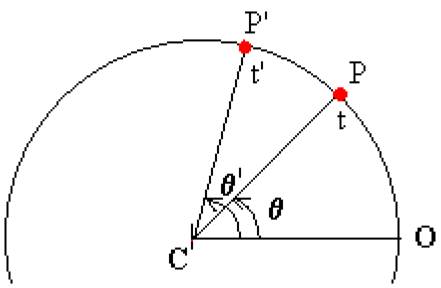


Posición angular, *q*

En el instante *t* el móvil se encuentra en el punto P. Su posición angular viene dada por el ángulo *q*, que hace el punto P, el centro de la circunferencia C y el origen de ángulos O.

El ángulo *q*, es el cociente entre la longitud del arco *s* y el radio de la circunferencia *r*, *q=s/r.* La posición angular es el cociente entre dos longitudes y por tanto, no tiene dimensiones.

Velocidad angular, *w*



En el instante *t'* el móvil se encontrará en la posición P' dada por el ángulo *q '*. El móvil se habrá desplazado Δ*q=q ' -q* en el intervalo de tiempo Δ*t=t'-t* comprendido entre *t* y *t'*.

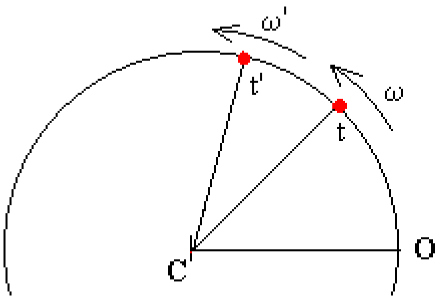
Se denomina velocidad angular media al cociente entre el desplazamiento y el tiempo.

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Como ya se explicó en el movimiento rectilíneo, la velocidad angular en un instante se obtiene calculando la velocidad angular media en un intervalo de tiempo que tiende a cero.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Aceleración angular, *a*



Si en el instante *t* la velocidad angular del móvil es *w* y en el instante *t'* la velocidad angular del móvil es *w'*. La velocidad angular del móvil ha cambiado $\Delta w = w' - w$ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t' - t$ comprendido entre *t* y *t'*.

Se denomina aceleración angular media al cociente entre el cambio de velocidad angular y el intervalo de tiempo que tarda en efectuar dicho cambio.

$$\langle \alpha \rangle = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

La aceleración angular en un instante, se obtiene calculando la aceleración angular media en un intervalo de tiempo que tiende a cero.

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

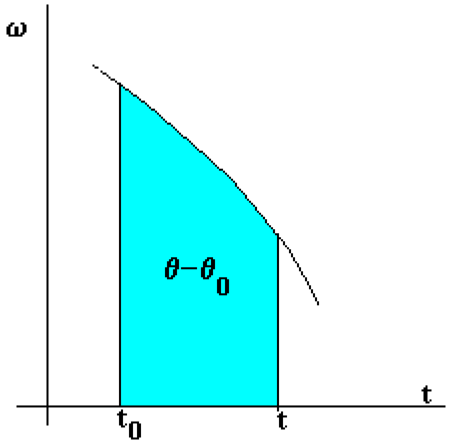
Dada la velocidad angular, hallar el desplazamiento angular

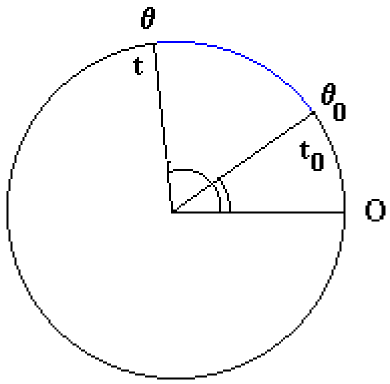
Si conocemos un registro de la velocidad angular del móvil podemos calcular su desplazamiento $q - q_0$ entre los instantes t_0 y *t*, mediante la integral definida.

$$\theta - \theta_0 = \int_{t_0}^{t} \omega \, dt$$

El producto *w dt* representa el desplazamiento angular del móvil entre los instantes *t* y *t+dt*, o en el intervalo *dt*. El desplazamiento total es la suma de los infinitos desplazamientos angulares infinitesimales entre los instantes t_0 y *t*.

En la figura, se muestra una gráfica de la velocidad angular en función del tiempo, el área en color azul mide el desplazamiento angular total del móvil entre los instantes t_0 y t, el arco en color azul marcado en la circunferencia.

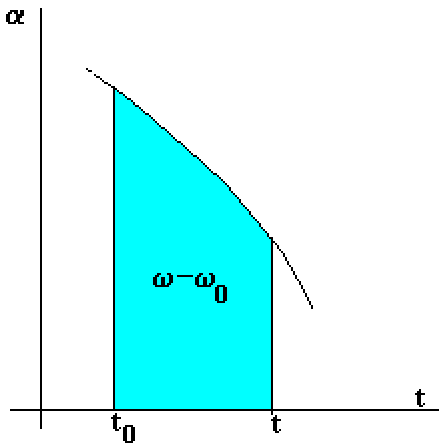




Hallamos la posición angular q del móvil en el instante t, sumando la posición inicial q_0 al desplazamiento, calculado mediante la medida del área bajo la curva w-t o mediante cálculo de la integral definida en la fórmula anterior.

Dada la aceleración angular, hallar el cambio de velocidad angular

Del mismo modo que hemos calculado el desplazamiento angular del móvil entre los instantes t_0 y t, a partir de un registro de la velocidad angular w en función del tiempo t, podemos calcular el cambio de velocidad $w - w_0$ que experimenta el móvil entre dichos instantes, a partir de una gráfica de la aceleración angular en función del tiempo.



En la figura, el cambio de velocidad *w* - *w₀* es el área bajo la curva *a* - *t*, o el valor numérico de la integral definida en la fórmula anterior.

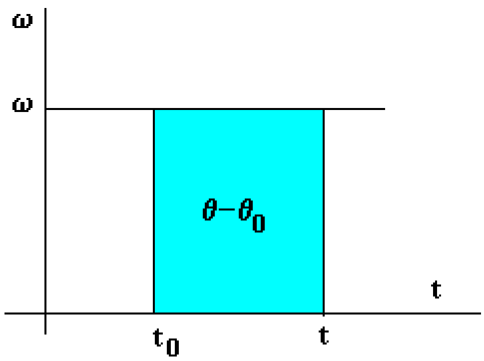
Conociendo el cambio de velocidad angular *w* -*w₀*, y el valor inicial *w₀* en el instante inicial *t₀*, podemos calcular la velocidad angular *w* en el instante *t*.

Resumiendo, las fórmulas empleadas para resolver problemas de movimiento circular son similares a las del movimiento rectilíneo.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\theta - \theta_0 = \int_{t_0}^{t} \omega dt \qquad \omega - \omega_0 = \int_{t_0}^{t} \alpha \, dt$$

Movimiento circular uniforme



Un movimiento circular uniforme es aquél cuya velocidad angular *w* es constante, por tanto, la aceleración angular es cero. La posición angular *q* del móvil en el instante *t* lo podemos calcular integrando

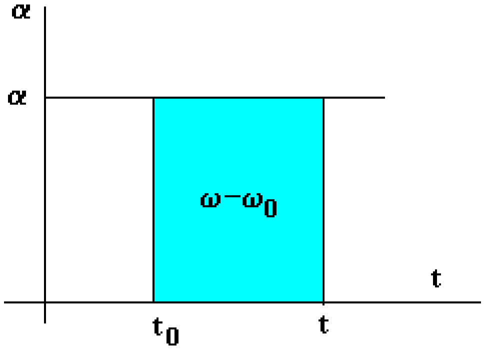
q -q₀=w(t-t₀)

o gráficamente, en la representación de *w* en función de *t*.

Habitualmente, el instante inicial *t₀* se toma como cero. Las ecuaciones del movimiento circular uniforme son análogas a las del movimiento rectilíneo uniforme

$$\alpha = 0$$
$$\omega = \text{cte}$$
$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

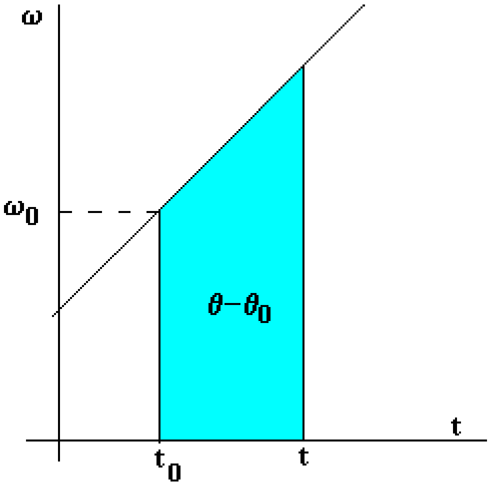
Movimiento circular uniformemente acelerado



Un movimiento circular uniformemente acelerado es aquél cuya aceleración *a* es constante.

Dada la aceleración angular podemos obtener el cambio de velocidad angular w -w_0 entre los instantes t_0 y t, mediante integración, o gráficamente.

$$\omega - \omega_0 = \alpha(t - t_0)$$



Dada la velocidad angular w en función del tiempo, obtenemos el desplazamiento q -q_0 del móvil entre los instantes t_0 y t, gráficamente (área de un rectángulo + área de un triángulo), o integrando

$$\theta - \theta_0 = \omega_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

Habitualmente, el instante inicial t_0 se toma como cero. Las fórmulas del movimiento circular uniformemente acelerado son análogas a las del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

$$\alpha = \text{cte}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

Despejando el tiempo *t* en la segunda ecuación y sustituyéndola en la tercera, relacionamos la velocidad angular *ω* con el desplazamiento θ-θ_0

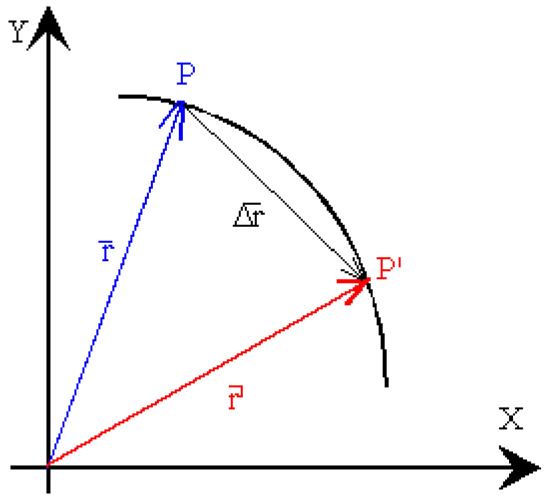
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

2.4 MOVIMIENTO CURVILINEO GENERAL

Movimiento curvilíneo

Supongamos que el movimiento tiene lugar en el plano XY, Situamos un origen, y unos ejes, y representamos la trayectoria del móvil, es decir, el conjunto de puntos por los que pasa el móvil. Las magnitudes que describen un movimiento curvilíneo son:

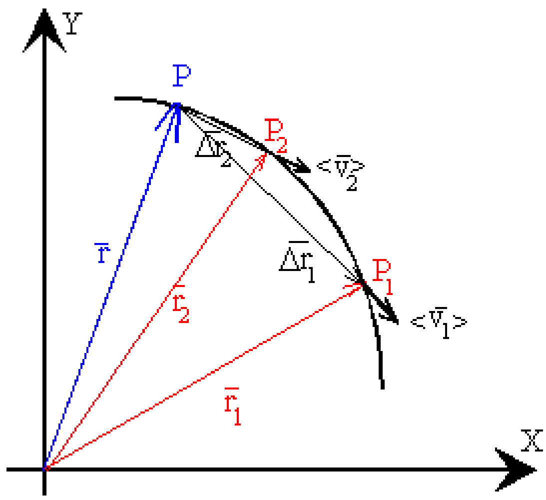
Vector posición r en un instante *t*.



Como la posición del móvil cambia con el tiempo. En el instante *t,* el móvil se encuentra en el punto P, o en otras palabras, su vector posición es **r** y en el instante *t'* se encuentra en el punto P', su posición viene dada por el vector **r'**.

Diremos que el móvil se ha desplazado **Δr=r'-r** en el intervalo de tiempo Δ*t*=*t'*-*t*. Dicho vector tiene la dirección de la secante que une los puntos P y P'.

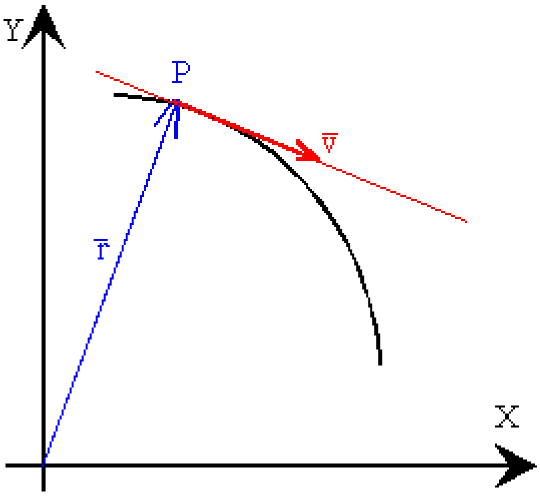
Vector velocidad



El vector velocidad media, se define como el cociente entre el vector desplazamiento **Δr** y el tiempo que ha empleado en desplazarse Δ*t*.

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{t'-t} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

El vector velocidad media tiene la misma dirección que el vector desplazamiento, la secante que une los puntos P y P_1 cuando se calcula la velocidad media $\langle \mathbf{v}_1 \rangle$ entre los instantes *t* y t_1.



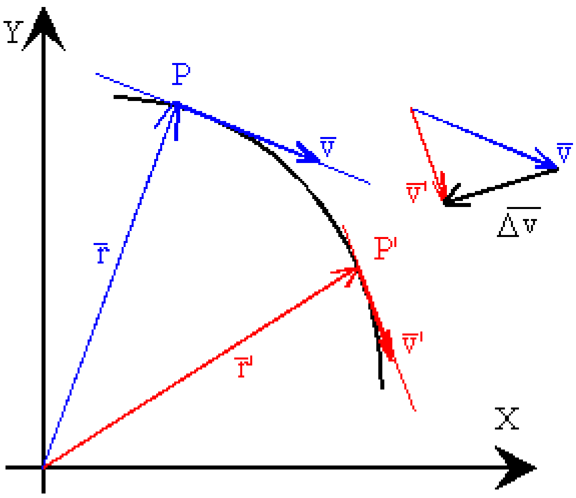
El vector velocidad en un instante, es el límite del vector velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Como podemos ver en la figura, a medida que hacemos tender el intervalo de tiempo a cero, la dirección del vector velocidad media, la recta secante que une sucesivamente los puntos P, con los puntos P_1, P_2....., tiende hacia la tangente a la trayectoria en el punto P.

En el instante *t*, el móvil se encuentra en P y tiene una velocidad **v** cuya dirección es tangente a la trayectoria en dicho punto.

Vector aceleración



En el instante *t* el móvil se encuentra en P y tiene una velocidad **v** cuya dirección es tangente a la trayectoria en dicho punto.

En el instante *t'* el móvil se encuentra en el punto P' y tiene una velocidad **v**'.

El móvil ha cambiado, en general, su velocidad tanto en módulo como en dirección, en la cantidad dada por el vector diferencia Δ**v=v'-v**.

Se define la aceleración media como el cociente entre el vector cambio de velocidad Δ**v** y el intervalo de tiempo $\Delta t=t'-t$, en el que tiene lugar dicho cambio.

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \frac{\mathbf{v'}-\mathbf{v}}{t'-t} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$$

Y la aceleración **a** en un instante

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Resumiendo, las ecuaciones del movimiento curvilíneo en el plano XY son

$$x = x(t) \qquad v_x = \frac{dx}{dt} \qquad a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$y = y(t) \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

La primera fila corresponde, a las ecuaciones de un movimiento rectilíneo a lo largo del eje X, la segunda fila corresponde, a las ecuaciones de un movimiento rectilíneo a lo largo del eje Y, y lo mismo podemos decir respecto del eje Z.

Por tanto, podemos considerar un movimiento curvilíneo como la composición de movimientos rectilíneos a lo largo de los ejes coordenados.

Ejemplo 1:

Un automóvil describe una curva plana tal que sus coordenadas rectangulares, en función del tiempo están dadas por las expresiones: $x=2t^3-3t^2$, $y=t^2-2t+1$ m. Calcular:

- Las componentes de la velocidad en cualquier instante.

$v_x=6t^2-6t$ m/s
$v_y=2t-2$ m/s

- Las componentes de la aceleración en cualquier instante.

$a_x=12t$m/s^2
$a_y=2$ m/s^2

Ejemplo 2:

Un punto se mueve en el plano de tal forma que las componentes rectangulares de la velocidad en función del tiempo vienen dadas por las expresiones: $v_x=4t^3+4t$, $v_y=4t$ m/s. Si en el instante inicial $t_0=0$ s, el móvil se encontraba en la posición $x_0=1$, $y_0=2$ m. Calcular:

- Las componentes de la aceleración en cualquier instante

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 12t^2 + 4 \text{ m/s}^2$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 4 \text{ m/s}^2$$

· Las coordenadas x e y, del móvil, en función del tiempo.

Dada la velocidad $v_x=4t^3+4t$ del móvil, el desplazamiento x-1 entre los instantes 0 y t se calcula mediante la integral

$$x - 1 = \int_0^t \left(4t^3 + 4t\right)dt$$

$x=t^4+2t^2+1$ m

Dada la velocidad $v_y=4t$ del móvil, el desplazamiento y-2 entre los instantes 0 y t se calcula mediante la integral

$$y - 2 = \int_0^t (4t)dt$$

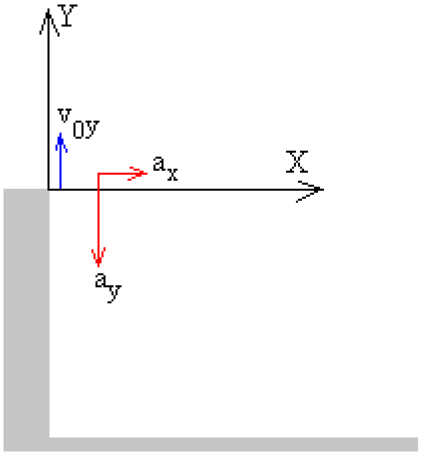
$y=2t^2+2$ m

Ejemplo 3:

Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s desde la azotea de un edificio de 50 m de altura. La pelota además es empujada por el viento, produciendo un movimiento horizontal con una aceleración de 2 m/s^2. Calcular:

- La distancia horizontal entre el punto de lanzamiento y de impacto
- La altura máxima

- Los instantes y los valores de las componentes de la velocidad cuando la pelota se encuentra a 60 m de altura sobre el suelo.



1. Primero, se establece el origen en el punto del lanzamiento y los ejes X e Y apuntando hacia arriba.
2. Se determinan los signos de las velocidades iniciales v_{0x}=0 y v_{0y}=20 y de la aceleración a_y=-10.
3. Se escriben las ecuaciones del movimiento

- Movimiento uniformemente acelerado a lo largo del eje X

$a_x=2$
$v_x=2t$
$x=2t^2/2$

- Movimiento uniformemente acelerado a lo largo del eje Y (movimiento de caída de los cuerpos)

$a_y=-10$
$v_y=20+(-10)t$
$y=20t+(-10)t^2/2$

1. El punto de impacto tiene de coordenadas x desconocida e y=-50 m. Dado y se obtiene el valor de t y luego el valor de x.

$y=-50$ m
$t=1.74$ s
$x=3.03$ m

2. La altura máxima se obtiene cuando la velocidad vertical es cero

$v_y=0$ m/s
$t=2$ s
$y=20$ m

La altura desde el suelo es 20+50=70 m.

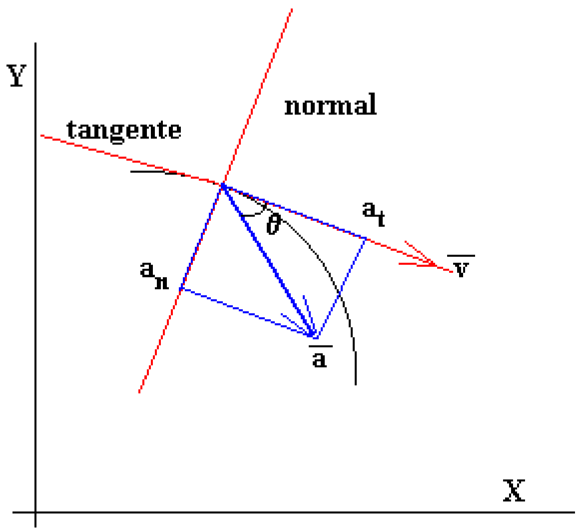
3. El móvil se encuentra en dos instantes a 60 m de altura sobre el suelo (10 sobre el origen), ya que su trayectoria corta en dos puntos a la recta horizontal y=10 m. La ecuación de segundo grado tiene dos raíces

$10=20t+(-10)t^2/2$
t_1=0.59 s y t_2=3.41 s.

Componentes tangencial y normal de la aceleración

Las componentes rectangulares de la aceleración no tienen significado físico, pero si lo tienen las componentes de la aceleración en un nuevo sistema de referencia formado por la tangente a la trayectoria y la normal a la misma.

Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración en un determinado instante es un simple problema de geometría, tal como se ve en la figura.



- Se dibujan los ejes horizontal X y vertical Y.

- Se calculan las componentes rectangulares de la velocidad y de la aceleración en dicho instante. Se representan los vectores velocidad y aceleración en dicho sistema de referencia.

- Se dibujan los nuevos ejes, la dirección tangencial es la misma que la dirección de la velocidad, la dirección normal es perpendicular a la dirección tangencial.

- Con la regla y el cartabón se proyecta el vector aceleración sobre la dirección tangencial y sobre la dirección normal.

- Se determina el ángulo *q* entre el vector velocidad y el vector aceleración, y se calcula el valor numérico de dichas componentes: a_t=*a* cos*q* y a_n=*a* sen*q*

Ejemplo:

El vector velocidad del movimiento de una partícula viene dado por **v**=(3t-2)**i**+(6t^2-5)**j** m/s**.** Calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante *t*=2 s. Dibujar el vector velocidad, el vector aceleración y las componentes tangencial y normal en dicho instante.

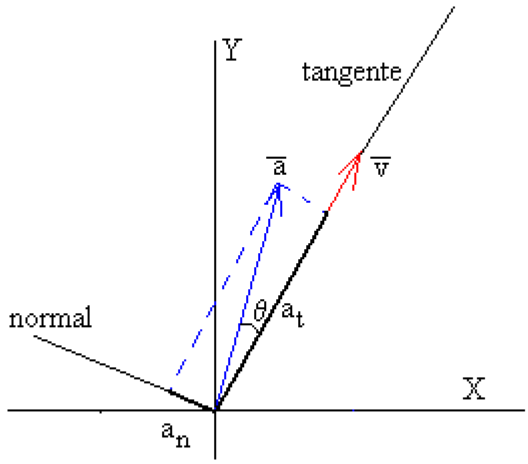
1. Dadas las componentes de la velocidad obtenemos las componentes de la aceleración

v_x=3*t*-2m/s, a_x=3m/s^2
v_y=6t^2-5 m/s, a_y=12*t* m/s^2

2. Los valores de dichas componentes en el instante *t*=2 s son

v_x=4m/s, a_x=3m/s^2
v_y=19 m/s, a_y=24 m/s^2

3. Dibujamos el vector velocidad y el vector aceleración



4. Calculamos el ángulo *q* que forman el vector velocidad y el vector aceleración

- Por el producto escalar: **v·a**=*v·a*·cos*q*

- Calculando el ángulo que forma cada vector con el eje X, y restando ambos ángulos

5. Se calculan las componentes tangencial y normal de la aceleración

a_t=a·cos$q$=24.1m/s^2
a_n=a·sen$q$=2.0 m/s^2

Podemos hallar la aceleración tangencial en cualquier instante, a partir del producto escalar del vector aceleración **a** y el vector velocidad **v**.

v·a=va·cosθ=v·a_t

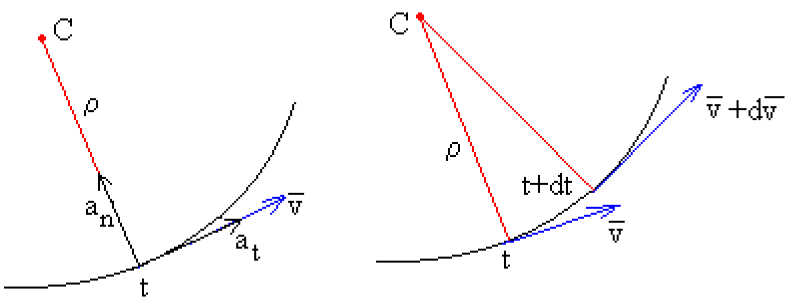
$$a_t = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{v} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

La aceleración normal, se obtiene a partir del módulo de la aceleración a y de la aceleración tangencial a_t

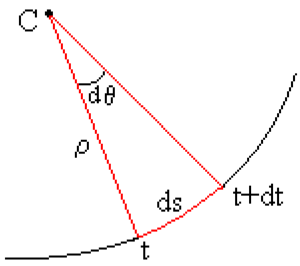
$$a_n^2 = a^2 - a_t^2 = a_x^2 + a_y^2 - \frac{(v_x a_x + v_y a_y)^2}{v_x^2 + v_y^2}$$

$$a_n = \frac{a_x v_y - a_y v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

Radio de curvatura



En la figura, se muestra el radio de curvatura y el centro de curvatura de una trayectoria cualesquiera en el instante t. Se dibuja la dirección del vector velocidad **v** en el instante t, la dirección del vector velocidad **v**+**dv** en el instante $t+dt$. Se trazan rectas perpendiculares a ambas direcciones, que se encuentran en el punto C denominado centro de curvatura. La distancia ente entre la posición del móvil en el instante *t*, y el centro de curvatura *C* es el radio de curvatura *ρ*.

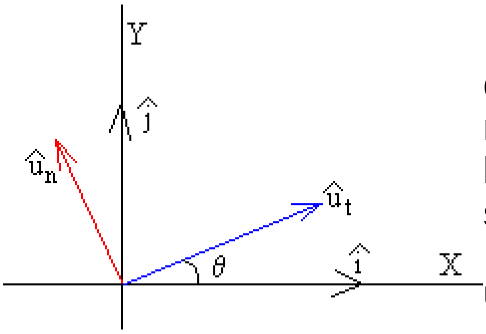


En el intervalo de tiempo comprendido entre *t* y *t+dt,* la dirección del vector velocidad cambia un ángulo *dθ*. que es el ángulo entre las tangentes o entre las normales. El móvil se desplaza en este intervalo de tiempo un arco *ds=ρ·dθ,* tal como se aprecia en la figura.

Otra forma de obtener las componentes tangencial y normal de la aceleración, es la de escribir el vector velocidad **v** como producto de su módulo *v* por un vector unitario que tenga su misma dirección y sentido $\mathbf{u}_t=\mathbf{v}/v$. La derivada de un producto se compone de la suma de dos términos

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d(v\mathbf{u_t})}{dt}=\frac{dv}{dt}\mathbf{u_t}+v\frac{d\mathbf{u_t}}{dt}$$

El primer término, tiene la dirección de la velocidad o del vector unitario $\mathbf{u}_t$, es la componente tangencial de la aceleración



El segundo término, vamos a demostrar que tiene la dirección normal $\mathbf{u}_n$. Como vemos en la figura las componentes del vector unitario $\mathbf{u}_t$ son

$\mathbf{u}_t=\cos\theta\cdot\mathbf{i}+\text{sen}\,\theta\cdot\mathbf{j}$

Su derivada es

$$\frac{d\mathbf{u_t}}{dt}=(-\text{sen}\,\theta\,\mathbf{i}+\cos\theta\,\mathbf{j})\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u_n}=\frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt}\mathbf{u_n}=\frac{v}{\rho}\mathbf{u_n}$$

El vector aceleración es

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\mathbf{u_t}+\frac{v^2}{\rho}\mathbf{u_n}$$

Las componentes tangencial y normal de la aceleración valen, respectivamente

$$a_t = \frac{dv}{dt} \qquad\qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Esta última fórmula, la obtuvimos de una forma más simple para una partícula que describía un movimiento circular uniforme.

Como la velocidad es un vector, y un vector tiene módulo y dirección. Existirá aceleración siempre que cambie con el tiempo bien el módulo de la velocidad, la dirección de la velocidad o ambas cosas a la vez.

- Si solamente cambia el módulo de la velocidad con el tiempo, como en un movimiento rectilíneo, tenemos únicamente aceleración tangencial.
- Si solamente cambia la dirección de la velocidad con el tiempo, pero su módulo permanece constante como en un movimiento circular uniforme, tenemos únicamente aceleración normal.
- Si cambia el módulo y la dirección de la velocidad con el tiempo, como en un tiro parabólico, tendremos aceleración tangencial y aceleración normal..