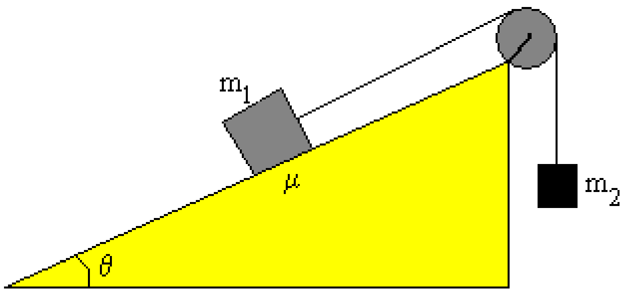
Fuerza de rozamiento en un plano inclinado

En esta página analizamos detalladamente un problema muy común en un curso de Física cuya solución no se suele presentar de forma completa.

Un bloque de masa m_1 se sitúa sobre un plano inclinado de ángulo ϑ. El bloque está conectado a otro bloque de masa m_2 que cuelga de su otro extremo mediante una cuerda inextensible que pasa por una polea ideal (de rozamiento y momento de inercia despreciables). Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre el bloque de masa m_1 y el plano inclinado es μ, estudiar el movimiento del sistema.



Por razón de simplicidad, supondremos que los coeficientes de rozamiento estático y cinético tienen el mismo valor μ.

Descripción

Tenemos analizar dos posibles situaciones

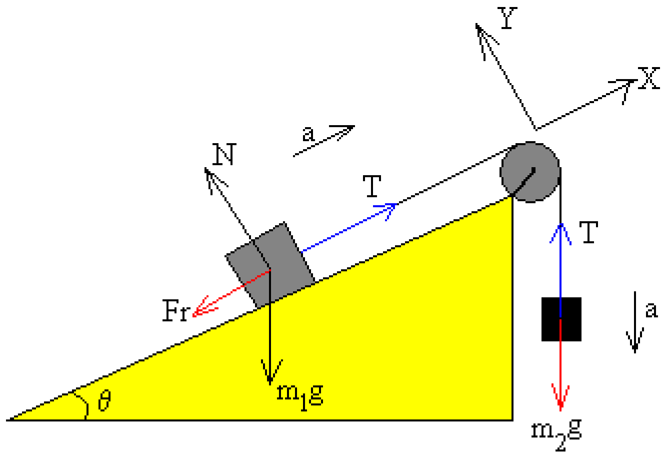
1. Cuando el bloque de masa m_1 está en movimiento
2. Cuando el bloque de masa m_1 está en reposo sobre el plano inclinado

Para dibujar de forma correcta el sentido de la fuerza de rozamiento, se ha de tener en cuenta que:

- Cuando el bloque desliza, la fuerza de rozamiento es siempre de sentido contrario al vector velocidad.
- Si el bloque de masa m_1 está en reposo, la fuerza de rozamiento es de sentido contrario a la resultante de las otras fuerzas que actúan sobre el bloque.

1. El bloque de masa m_1 desliza sobre el plano inclinado

- Movimiento del bloque a lo largo del plano, hacia arriba



La ecuación del movimiento del bloque que cuelga de masa m_2 es
$m_2g-T=m_2a$

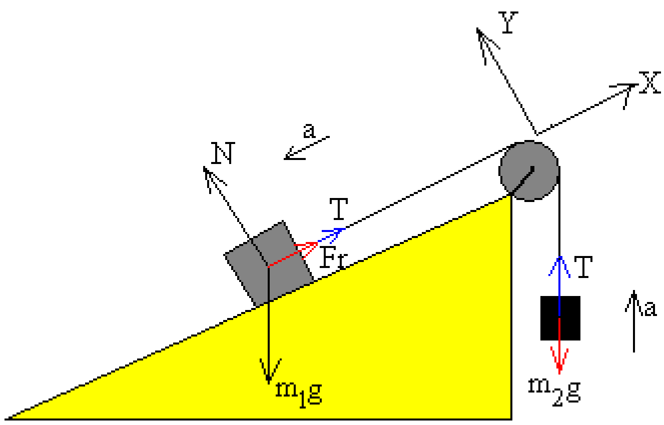
La ecuación del movimiento del bloque de masa m_1 que desliza hacia arriba es
$T-m_1g\cdot\text{sen}\vartheta-Fr=m_1a$

La reacción del plano vale $N-m_1g\cdot\cos\vartheta=0$
y la fuerza de rozamiento $F_r=\mu\cdot N$

Despejamos la aceleración a

$$a = g\frac{m_2 - m_1\text{sen}\,\theta - \mu m_1\cos\theta}{m_2 + m_1}$$

- Movimiento del bloque a lo largo del plano, hacia abajo



La fuerza de rozamiento cambia de sentido. Cambiamos el signo la fuerza de rozamiento en la fórmula de la aceleración

$$a = g\frac{m_2 - m_1\text{sen}\,\theta + \mu m_1\cos\theta}{m_2 + m_1}$$

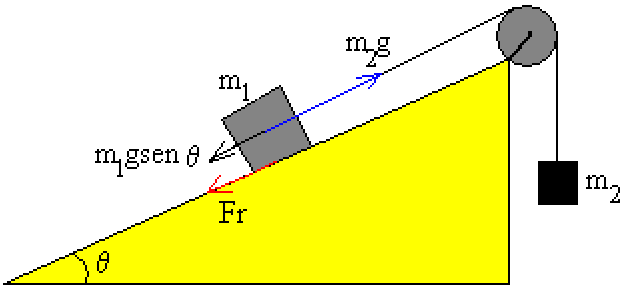
Alternativamente, podemos volver a plantear las ecuaciones del movimiento a partir del esquema de la figura.

2. El bloque de masa m_1 está en reposo sobre el plano inclinado

En este caso la tensión de la cuerda es igual al peso $T=m_2g$

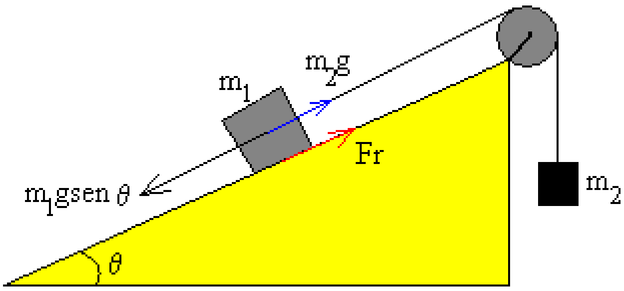
La fuerza de rozamiento se opone a la resultante de las otras dos fuerzas opuestas:

- la tensión de la cuerda m_2g
- la componente del peso $m_1g\text{sen}\vartheta$



La componente del peso es menor que la tensión de la cuerda, la fuerza de rozamiento se opone a que el cuerpo se mueva a lo largo del plano inclinado hacia arriba.

Si $m_2g> m_1g\text{sen}\vartheta$ entonces $m_2g- m_1g\text{sen}\vartheta-F_r=0$ (1)



La componente del peso es mayor que la tensión de la cuerda, la fuerza de rozamiento se opone a que el cuerpo se mueva hacia abajo.

Si $m_2g< m_1g\text{sen}\vartheta$ entonces $m_2g-m_1g\text{sen}\vartheta+F_r=0$ (2)

La fuerza de rozamiento es nula para el ángulo ϑ que cumple que $m_2g=m_1g\text{sen}\vartheta$.

3. Cuando el bloque de masa m_1 empieza a deslizar a lo largo del plano

Variando el ángulo de inclinación ϑ del plano inclinado llega un momento en el que el bloque empieza a deslizar, en ese momento la fuerza de rozamiento alcanza su valor máximo $F_r=\mu N= \mu m_1g\cos\vartheta$

Vamos a determinar el o los ángulos de plano inclinado para los cuales el bloque de masa m_1 va a empezar a deslizar a lo largo de dicho plano

Llamando $m=m_2/m_1$, la ecuación de equilibrio de fuerzas (1) se escribe

m-senϑ- μcosϑ=0

Teniendo en cuenta que $\cos^2\vartheta=1-\text{sen}^2\vartheta$. Despejando cos$\vartheta$ y elevando al cuadrado, nos queda la ecuación de segundo grado en senϑ.

$(1+\mu^2)\text{sen}^2\vartheta-2m\,\text{sen}\vartheta+(m^2-\mu^2)=0$

La misma ecuación de segundo grado se obtiene a partir de la ecuación de equilibrio de fuerzas (2)

$$\text{sen}\,\theta=\frac{m\pm\mu\sqrt{1-m^2+\mu^2}}{1+\mu^2}$$

La ecuación de segundo grado tiene dos raíces reales siempre que el discriminante sea positivo $1-m^2+\mu^2\geq 0$.

Para que las dos raíces reales sean positivas se tiene que cumplir que la raíz más pequeña sea positiva, esto es

$$m\geq\mu\sqrt{1-m^2+\mu^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos la desigualdad equivalente
$m\geq\mu$

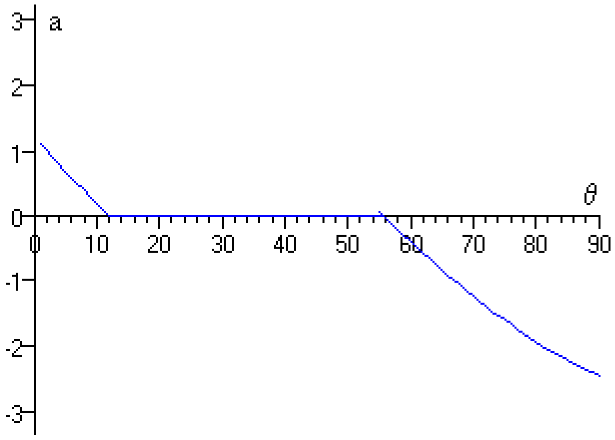
- El discriminante es siempre positivo para $m<1$ es decir, para $m_2<m_1$
- En cambio, si $m>1$, es decir, si $m_2>m_1$ las raíces reales existen si $\mu^2\geq m^2-1$

Ejemplos

1. m=0.6 y μ=0.4

La fuerza de rozamiento es nula para el ángulo m=senϑ, es decir, para ϑ=36.9º.

Al resolver la ecuación de segundo grado, se obtienen dos ángulos ϑ_1=12.05 y ϑ_2=55.66



El ángulo ϑ_1 cumple la ecuación de equilibrio (2)

m-senϑ+μcosϑ=0

El ángulo ϑ_2 cumple la ecuación de equilibrio (1)

m-senϑ- μcosϑ=0

Así pues, en el intervalo angular entre θ_1 =12.05º a θ_2=55.66º el bloque de masa m_1 está en reposo sobre el plano inclinado.

- $\vartheta<\vartheta_1$

Para todos los ángulos ϑ del plano inclinado menores que ϑ_1 se cumple que $m_2g>m_1g$senϑ o bien, que m>senϑ y el bloque desliza a lo largo del plano inclinado hacia arriba a>0. Por ejemplo, cuando ϑ=10º

$$a = g\frac{m - \operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta}{m+1} = 0.20\ \mathrm{m/s}^2$$

- $\vartheta>\vartheta_2$

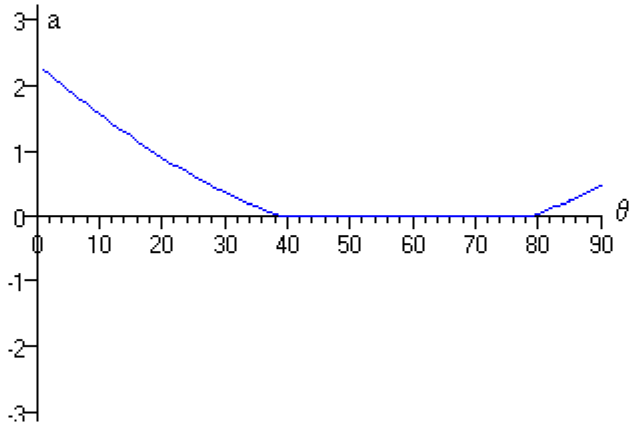
Para todos los ángulos ϑ del plano inclinado mayores que ϑ_2, se cumple que $m_2g<m_1g$senϑ o bien, que m<senϑ y el bloque desliza a lo largo del plano inclinado hacia abajo a<0. Por ejemplo, cuando ϑ=70º

$$a = g\frac{m - \operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta}{m+1} = -1.24\ \mathrm{m/s}^2$$

2. m=1.1 y μ=0.6

El discriminante de la ecuación de segundo grado es positivo ya que se cumple que $\mu^2\geq m^2-1$

Se obtienen dos ángulos ϑ_1=39.64 y ϑ_2=78.43



Como m>senϑ para todos los ángulos de inclinación ϑ ambas soluciones cumplen la primera ecuación de equilibrio (1) m-senϑ- μcosϑ=0

Así pues, en el intervalo angular entre ϑ_1 =39.64º a ϑ_2=78.43º el bloque de masa m_1 está en reposo sobre el plano inclinado.

- $\vartheta<\vartheta_1$

Para todos los ángulos ϑ del plano inclinado menores que ϑ_1 el bloque desliza a lo largo del plano inclinado hacia arriba a>0. Por ejemplo, cuando ϑ=30º

$$a = g\frac{m - \operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta}{m+1} = 0.37\ \mathrm{m/s}^2$$

- $\vartheta>\vartheta_2$

Para todos los ángulos ϑ del plano inclinado mayores que ϑ_2 el bloque desliza a lo largo del plano inclinado hacia arriba a>0. Por ejemplo, cuando ϑ=80º

a=0.05 m/s^2

3. m=1.2 y μ=0.6

No existen raíces reales, el discriminante de la ecuación de segundo grado es negativo ya que no se cumple que $\mu^2\geq m^2-1$

El bloque desliza a lo largo del plano inclinado hacia arriba para cualquier ángulo ϑ. Por ejemplo, cuando ϑ=30º

a=0.80 m/s^2

Actividades

Se introduce

- La masa m_2 del bloque, en el control de edición titulado **Masa bloque**

- El coeficiente de rozamiento μ, en el control de edición titulado **Coef. rozamiento**
- La masa m_1 del bloque que está sobre el plano inclinado se ha fijado en 1 kg.

Se pulsa el botón titulado **Nuevo**

Cada vez que se cambia

- El ángulo ϑ del plano inclinado, se introduce un valor en el control de edición titulado **Ángulo** y se pulsa **Enter** o **Retorno**, o se actúa sobre la barra de desplazamiento.

Se pulsa el botón titulado **Empieza**

En la parte izquierda del applet, observamos la representación gráfica de la aceleración del bloque en función del ángulo de inclinación del plano inclinado ϑ.

Un punto de color rojo sobre la curva azul, indica el valor del ángulo ϑ y de la aceleración a para la "experiencia" actual.

En la parte superior derecha, se representan las fuerzas que actúan sobre el bloque situado sobre el plano inclinado. Lo más importante es observar el sentido de la fuerza de rozamiento (flecha de color rojo) en los distintos casos que se han estudiado en el apartado Ejemplos.