UNIDAD V

5 Sistemas de Partículas

5.1 Dinámica de un sistema de partículas

5.2 Movimiento del centro de masa

5.3 Teorema de conservación de la cantidad de movimiento

5.4 Teorema de conservación de la energía

5.5 Colisiones elásticas e inelásticas

5.6 Cuerpo rígido

5 Sistemas de Partículas.

La mayor parte de los objetos físicos no pueden por lo general tratarse como partículas. En mecánica clásica, un objeto extendido se considera como un sistema compuesto por un gran número de partículas puntuales.

El estudio sirve para el análisis de partículas libres, como para un sólido rígido en cuyo caso las partículas se mueven manteniendo distancias fijas entre sí. Antes de entrar en el tema, hablaremos del momento lineal e impulso.

Momento lineal e impulso

El momento lineal de una partícula de masa *m* que se mueve con una velocidad *v* se define como el producto de la masa por la velocidad

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v}$$

Se define el vector fuerza, como la derivada del momento lineal respecto del tiempo

$$\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

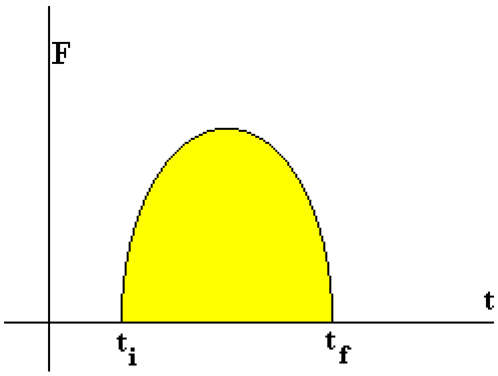
La segunda ley de Newton es un caso particular de la definición de fuerza, cuando la masa de la partícula es constante.

$$\mathbf{F}=\frac{d(m\mathbf{v})}{dt}=m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=m\mathbf{a}$$

Despejando $d\mathbf{p}$ en la definición de fuerza e integrando

$$d\mathbf{p}=\mathbf{F}dt \qquad \mathbf{p}_f-\mathbf{p}_i=\int_{t_i}^{t_f}\mathbf{F}dt$$

A la izquierda, tenemos la variación de momento lineal y a la derecha, la integral que se denomina impulso de la fuerza **F** en el intervalo que va de t_i a t_f.



Para el movimiento en una dimensión, cuando una partícula se mueve bajo la acción de una fuerza *F*, la integral es el área sombreada bajo la curva fuerza-tiempo.

$$p_f - p_i = \int_{t_i}^{t_f} F \cdot dt$$

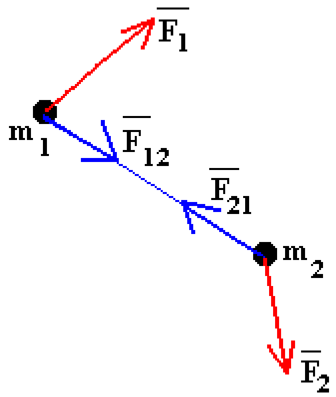
En muchas situaciones físicas se emplea la aproximación del impulso. En esta aproximación, se supone que una de las fuerzas que actúan sobre la partícula es muy grande pero de muy corta duración. Esta aproximación es de gran utilidad cuando se estudian los choques, por ejemplo, de una pelota con una raqueta o una pala. El tiempo de colisión es muy pequeño, del orden de centésimas o milésimas de segundo, y la fuerza promedio que ejerce la pala o la raqueta es de varios cientos o miles de newtons. Esta fuerza es mucho mayor que la gravedad, por lo que se puede utilizar la aproximación del impulso. Cuando se utiliza esta aproximación es importante recordar que los momentos lineales inicial y final se refieren al instante antes y después de la colisión, respectivamente.

5.1 Dinámica de un sistema de partículas

Sea un sistema de partículas. Sobre cada partícula actúan las fuerzas exteriores al sistema y las fuerzas de interacción mutua entre las partículas del sistema. Supongamos un sistema formado por dos partículas. Sobre la partícula 1 actúa la fuerza exterior $\mathbf{F}_1$ y la fuerza que ejerce la partícula 2, $\mathbf{F}_{12}$. Sobre la partícula 2 actúa la fuerza exterior $\mathbf{F}_2$ y la fuerza que ejerce la partícula 1, $\mathbf{F}_{21}$.

Por ejemplo, si el sistema de partículas fuese el formado por la Tierra y la Luna: las fuerzas exteriores serían las que ejerce el Sol (y el resto de los planetas) sobre la Tierra y sobre la Luna. Las fuerzas interiores serían la atracción mutua entre estos dos cuerpos celestes.

Para cada unas de las partículas se cumple que la razón de la variación del momento lineal con el tiempo es igual la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula considerada, es decir, el movimiento de cada partícula viene determinado por las fuerzas interiores y exteriores que actúan sobre dicha partícula.



$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}$$

$$\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}$$

Sumando miembro a miembro y teniendo en cuenta la tercera Ley de Newton, $\mathbf{F}_{12}=-\mathbf{F}_{21}$, tenemos que

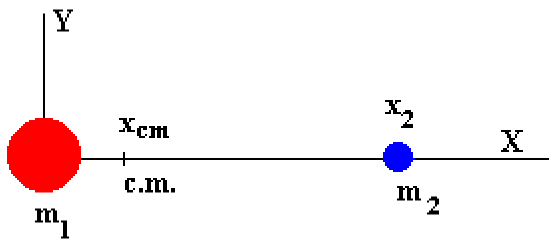
$$\frac{d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext}$$

Donde **P** es el momento lineal total del sistema y $\mathbf{F}_{\mathbf{ext}}$ es la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema de partículas. El movimiento del sistema de partículas viene determinado solamente por las fuerzas exteriores.

5.2 Movimiento del centro de masa.

En la figura, tenemos dos partículas de masas m_1 y m_2, como m_1 es mayor que m_2, la posición del centro de masas del sistema de dos partículas estará cerca de la masa mayor.



$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

En general, la posición $\mathbf{r}_{cm}$ del centro de masa de un sistema de *N* partículas es

$$\mathbf{r}_{cm}=\frac{\sum_{1}^{N}m_i\mathbf{r}_i}{\sum_{1}^{N}m_i}$$

La velocidad del centro de masas $\mathbf{v}_{cm}$ se obtiene derivando con respecto del tiempo

$$\mathbf{v}_{cm}=\frac{\sum_{1}^{N}m_i\mathbf{v}_i}{\sum_{1}^{N}m_i}=\frac{\mathbf{P}}{M}$$

En el numerador figura el momento lineal total y en el denominador la masa total del sistema de partículas.

De la dinámica de un sistema de partículas tenemos que

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt}=\mathbf{F}_{ext} \qquad M\frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt}=\mathbf{F}_{ext}$$

El centro de masas de un sistema de partículas se mueve como si fuera una partícula de masa igual a la masa total del sistema bajo la acción de la fuerza externa aplicada al sistema.

En un sistema aislado $\mathbf{F}_{ext}$=0 el centro de masas se mueve con velocidad constante $\mathbf{v}_{cm}$=cte.

El Sistema de Referencia del Centro de Masas

Para un sistema de dos partículas

$$\mathbf{v}_{cm}=\frac{m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2}$$

La velocidad de la partícula 1 respecto del centro de masas es

$$\mathbf{v}_{1cm}=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_{cm}=\frac{m_2(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)}{m_1+m_2}$$

La velocidad de la partícula 2 respecto del centro de masas es

$$\mathbf{v}_{2cm} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{cm} = -\frac{m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{m_1 + m_2}$$

En el sistema-C, las dos partículas se mueven en direcciones opuestas.

Momento lineal

Podemos comprobar fácilmente que el momento lineal de la partícula 1 respecto al sistema-C es igual y opuesto al momento lineal de la partícula 2 respecto del sistema-C

$\mathbf{p}_{1cm}=m_1\mathbf{v}_{1cm}$
$\mathbf{p}_{2cm}=m_2\mathbf{v}_{2cm}$
$\mathbf{p}_{1cm}=-\mathbf{p}_{2cm}$

Energía cinética

La relación entre las energías cinéticas medidas en el sistema-L y en el sistema-C es fácil de obtener

$$E_k = E_{kcm} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{cm}^2$$

El primer término, es la energía cinética relativa al centro de masas. El segundo término, es la energía cinética de una partícula cuya masa sea igual a la del sistema moviéndose con la velocidad del centro de masa. A este último término, se le denomina energía cinética de traslación del sistema.

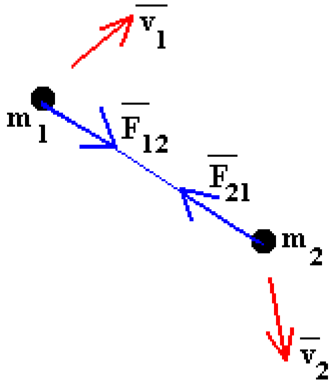
En un sistema de partículas podemos separar el movimiento del sistema en dos partes:

- el movimiento de traslación con la velocidad del centro de masa.
- el movimiento interno relativo al centro de masas.

En las siguientes páginas, mostraremos la importancia de centro de masas en la descripción del movimiento de un sistema de dos partículas que interactúan a través de un muelle elástico.

5.3 Teorema de conservación de la cantidad de movimiento.

Considérese dos partículas que pueden interactuar entre sí pero que están aisladas de los alrededores. Las partículas se mueven bajo su interacción mutua pero no hay fuerzas exteriores al sistema.



La partícula 1 se mueve bajo la acción de la fuerza $\mathbf{F}_{12}$ que ejerce la partícula 2. La partícula 2 se mueve bajo la acción de la fuerza $\mathbf{F}_{21}$ que ejerce la partícula 1. La tercera ley de Newton o Principio de Acción y Reacción establece que ambas fuerzas tendrán que ser iguales y de signo contrario.

$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$

Aplicando la segunda ley de Newton a cada una de las partículas

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \frac{d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)}{dt} = 0$$

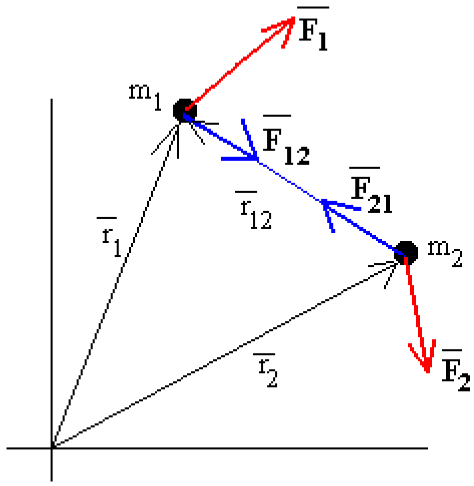
El principio de conservación del momento lineal afirma que el momento lineal total del sistema de partículas permanece constante, si el sistema es aislado, es decir, si no actúan fuerzas exteriores sobre las partículas del sistema. El principio de conservación del momento lineal es independiente de la naturaleza de las fuerzas de interacción entre las partículas del sistema aislado

$$m_1\mathbf{u_1} + m_2\mathbf{u_2} = m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2}$$

Donde $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ son las velocidades iniciales de las partículas 1 y 2 y $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$ las velocidades finales de dichas partículas.

5.4 Teorema de conservación de la energía.

Supongamos que la partícula de masa m_1 se desplaza $\mathbf{dr_1}$, y que la partícula de masa m_2 se desplaza $\mathbf{dr_2}$, como consecuencia de las fuerzas que actúan sobre cada una de las partículas.



El trabajo realizado por la resultante de las fuerzas que actúan sobre la primera partícula es igual al producto escalar

($\mathbf{F_1}$+$\mathbf{F_{12}}$)·$\mathbf{dr_1}$

Del mismo modo, el trabajo realizado por la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula de masa m_2 será

($\mathbf{F_2}$+$\mathbf{F_{21}}$)·$\mathbf{dr_2}$

Teniendo en cuenta que el trabajo de la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula modifica la energía cinética de la partícula, es decir, la diferencia entre la energía cinética final y la inicial.

$$\int (\mathbf{F_1}+\mathbf{F_{12}})\cdot \mathbf{dr}_1 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 - \frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2$$

$$\int (\mathbf{F_2}+\mathbf{F_{21}})\cdot \mathbf{dr}_2 = \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 - \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2$$

Sumando miembro a miembro, podemos escribir el trabajo como suma del trabajo de las fuerzas exteriores más el trabajo de las fuerza interiores o de interacción mutua. Se tiene en cuenta que las fuerzas interiores $\mathbf{F_{12}}$=-$\mathbf{F_{21}}$ son iguales y de sentido contrario

$$\int \mathbf{F_1}\cdot \mathbf{dr}_1 + \int \mathbf{F_2}\cdot \mathbf{dr}_2 + \int \mathbf{F_{12}}(\mathbf{dr}_1 - \mathbf{dr}_2) = \left(\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\right)_f - \left(\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\right)_i$$

Las fuerzas interiores $\mathbf{F_{12}}$ y $\mathbf{F_{21}}$ realizan trabajo siempre que haya un desplazamiento relativo de la partícula 1 respecto de la 2, ya que $\mathbf{dr_1}$-$\mathbf{dr_2}$=d($\mathbf{r_1}$-$\mathbf{r_2}$)=$\mathbf{dr_{12}}$

Normalmente, la fuerza $\mathbf{F_{12}}$ es conservativa (es de tipo gravitatorio, eléctrico, muelle elástico, etc.) El trabajo de una fuerza conservativa es igual a la diferencia entre la energía potencial inicial y final.

$$\int \mathbf{F_{12}}\cdot \mathbf{dr_{12}} = (E_p)_i - (E_p)_f$$

Denominando trabajo de las fuerzas exteriores a la suma

$$W_{ext} = \int \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \int \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2$$

Tendremos

$$W_{ext} = \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + E_p\right)_f - \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + E_p\right)_i$$

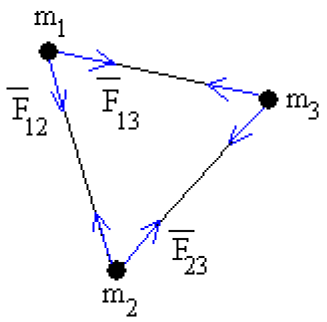
Entre paréntesis tenemos una cantidad que es la suma de la energía cinética de las dos partículas que forman el sistema y de la energía potencial que describe la interacción entre las dos partículas. A esta cantidad la denominamos energía *U* del sistema de partículas.

$$W_{ext}=U_f-U_i$$

El trabajo de las fuerzas exteriores es igual a la diferencia entre la energía del sistema de partículas en el estado final y la energía del sistema de partículas en el estado inicial.

Para un sistema de dos partículas, hay una sola interacción de la partícula 1 con la 2 descrita por la fuerza interna conservativa $\mathbf{F}_{12}$ o por la energía potencial E_{p12}. La energía del sistema *U* se escribe

$$U = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + E_{p12}$$



Para un sistema formado por tres partículas hay tres interacciones, de la partícula 1 con la 2, la 1 con la 3 y la 2 con la 3, descritas por las fuerzas internas conservativas $\mathbf{F}_{12}$, $\mathbf{F}_{23}$, $\mathbf{F}_{13}$ o por sus correspondientes energías potenciales. La energía del sistema es

$$U = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + E_{p12} + E_{p13} + E_{p23}$$

Sistema aislado

Para un sistema aislado, $\mathbf{F}_{ext}$=0, el trabajo W_{ext} de las fuerzas exteriores es cero, la energía *U* del sistema de partículas se mantiene constante. Para un sistema de dos partículas cuya interacción mutua está descrita por la energía potencial E_{p12}.

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2+E_{p12}=\text{cte}$$

La fuerza exterior F_{ext} es conservativa

El trabajo de la fuerza exterior es igual a la diferencia entre de energía potencial inicial y la final

$$W_{ext}=E_{pi}-E_{pf}$$

Tenemos por tanto que $U_i+E_{pi}=U_f+E_{pf}=\text{cte}$

Para un sistema de dos partículas bajo la acción de la fuerza conservativa peso, la conservación de la energía se escribirá

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2+E_{p12}+m_1gx_1+m_2gx_2=\text{cte}$$

5.5 Colisiones elásticas e inelásticas.

Se emplea el término de colisión para representar la situación en la que dos o más partículas interaccionan durante un tiempo muy corto. Se supone que las fuerzas impulsivas debidas a la colisión son mucho más grandes que cualquier otra fuerza externa presente.

El momento lineal total se conserva en las colisiones. Sin embargo, la energía cinética no se conserva debido a que parte de la energía cinética se transforma en energía térmica y en energía potencial elástica interna cuando los cuerpos se deforman durante la colisión.

Se define colisión inelástica como la colisión en la cual no se conserva la energía cinética. Cuando dos objetos que chocan se quedan juntos después del choque se dice que la colisión es perfectamente inelástica. Por ejemplo, un meteorito que choca con la Tierra.

En una colisión elástica la energía cinética se conserva. Por ejemplo, las colisiones entre bolas de billar son aproximadamente elásticas. A nivel atómico las colisiones pueden ser perfectamente elásticas.

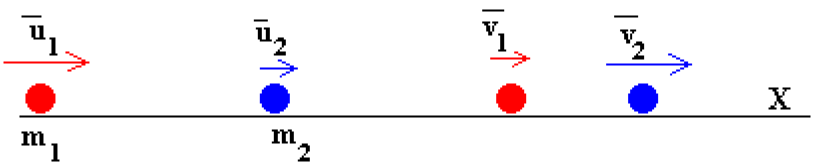
$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_1u_2^2+Q$$

La magnitud *Q* es la diferencia entre las energías cinéticas después y antes de la colisión. *Q* toma el valor de cero en las colisiones perfectamente elásticas, pero puede ser menor que cero si en el choque se pierde energía cinética como resultado de la deformación, o puede ser mayor que cero, si la energía cinética de las partículas después de la colisión es mayor que la inicial, por ejemplo, en la explosión de una granada o en la desintegración radiactiva, parte de la energía química o energía nuclear se convierte en energía cinética de los productos.

Coeficiente de restitución

Se ha encontrado experimentalmente que en una colisión frontal de dos esferas sólidas como las que experimentan las bolas de billar, las velocidades después del choque están relacionadas con las velocidades antes del choque, por la expresión

$$v_1-v_2=-e(u_1-u_2)$$



donde *e* es el coeficiente de restitución y tiene un valor entre 0 y 1. Esta relación fue propuesta por Newton y tiene validez solamente aproximada. El valor de uno es para un choque perfectamente elástico y el valor de cero para un choque perfectamente inelástico.

El coeficiente de restitución es la razón entre la velocidad relativa de alejamiento, y la velocidad relativa de acercamiento de las partículas.

5.6 Cuerpo rígido.

Consideraremos a un cuerpo como rígido, cuando su forma no varía aún cuando se mueve sometido a la acción de fuerzas.

- En consecuencia, la distancia entre las diferentes partículas que lo forman, permanece incambiada a lo largo del tiempo.
- Si bien el cuerpo rígido ideal no existe, es una muy buena aproximación para encarar el estudio de muchos cuerpos.

Modos de movimiento de un cuerpo rígido

Traslación	En este caso el cuerpo rígido se traslada, de modo que en cada instante las partículas que lo forman, tienen la misma velocidad y aceleración.
Rotación	El cuerpo rígido está en rotación, cuando cada partícula que lo integra, se mueve respecto a un eje con la misma velocidad angular y aceleración angular en cada instante.
General	En este caso tendremos una combinación de los dos anteriores, es decir una rotación y traslación que puede ser estudiado como una traslación y rotación del centro de masa que lo representa más una rotación respecto al centro de masa.

En general un cuerpo puede tener tres tipos distintos de movimiento simultáneamente.

De traslación a lo largo de una trayectoria, de rotación mientras se está trasladando, en este caso la rotación puede ser sobre un eje que pase por el cuerpo, y si a la vez este eje está girando en torno a un eje vertical, a la rotación del eje del cuerpo rotante se le llama movimiento de precesión (movimiento asociado al cambio de dirección en el espacio por ejemplo un trompo), y de vibración de cada parte del cuerpo mientras se traslada y gira. Por lo tanto el estudio del movimiento puede ser en general muy complejo, por esta razón se estudia cada movimiento en forma independiente.

Cuando un cuerpo está en rotación, cada punto tiene un movimiento distinto de otro punto del mismo cuerpo, aunque como un todo se esté moviendo de manera similar, por lo que ya no se puede representar por una partícula. Pero se puede representar como un objeto extendido formado por un gran número de partículas, cada una con su propia velocidad y aceleración. Al tratar la rotación del cuerpo, el análisis se simplifica si se considera como un objeto rígido y se debe tener en cuenta las dimensiones del cuerpo.

Cuerpo rígido. Se define como un cuerpo ideal cuyas partes (partículas que lo forman) tienen posiciones relativas fijas entre sí cuando se somete a fuerzas externas, es decir no deformable. Con esta definición se elimina la posibilidad de que el objeto tenga movimiento de vibración. Este modelo de cuerpo rígido es muy útil en muchas situaciones en las cuales la deformación del objeto es despreciable.

El movimiento general de un cuerpo rígido es una combinación de movimiento de traslación y de rotación. Para hacer su descripción es conveniente estudiar en forma separada esos dos movimientos.

TORQUE DE UNA FUERZA.

Cuando se aplica una fuerza en algún punto de un cuerpo rígido, el cuerpo tiende a realizar un movimiento de rotación en torno a algún eje. La propiedad de la fuerza para hacer girar al cuerpo se mide con una magnitud física que llamamos ***torque o momento*** de la fuerza. Se prefiere usar el nombre torque y no momento, porque este último se emplea para referirnos al momento lineal, al momento angular o al momento de inercia, que son todas magnitudes físicas diferentes para las cuales se usa el mismo término.

Analizaremos cualitativamente el efecto de rotación que una fuerza puede producir sobre un cuerpo rígido. Consideremos como cuerpo rígido a una regla fija (figura 1) en un punto *O* ubicado en un extremo de la regla, como se muestra en la figura , sobre el cual pueda tener una rotación, y describamos el efecto que alguna fuerza de la misma magnitud actuando en distintos puntos, produce sobre la regla fija en *O*. La fuerza **F1** aplicada en el punto *a* produce en torno a *O* una rotación en sentido antihorario, la fuerza **F2** aplicada en el punto *b* produce una rotación horaria y con mayor rapidez de rotación que en *a*, la fuerza **F3** aplicada en *b*, pero en la dirección de la línea de acción que pasa por *O*, no produce rotación (se puede decir que **F3** ‘empuja’ a la regla sobre *O*, pero no la mueve), **F4** que actúa inclinada en el punto *b* produce una rotación horaria, pero con menor rapidez de rotación que la que produce **F2**; **F5** y **F6** aplicadas perpendiculares a la regla, saliendo y entrando en el plano de la figura respectivamente, no producen rotación. Por lo tanto existe una cantidad que produce la rotación del cuerpo rígido relacionada con la fuerza, que es lo que definimos como el ***torque*** de la fuerza.

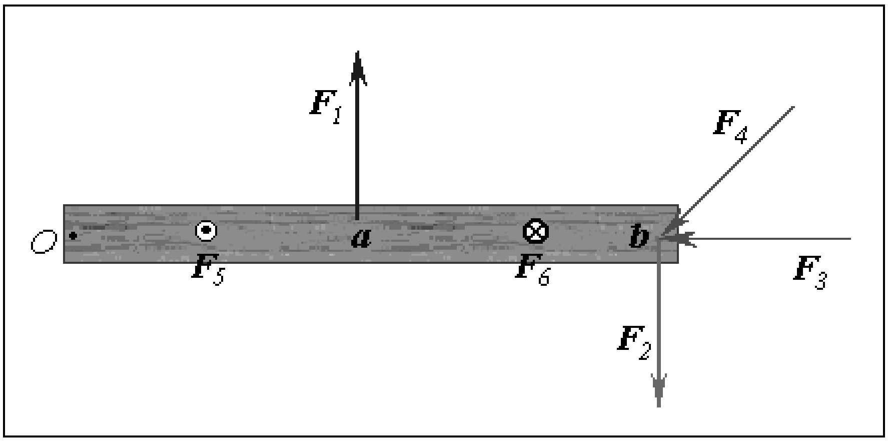


Figura 1.La regla.

Se define el ***torque*** τ de una fuerza ***F*** que actúa sobre algún punto del cuerpo rígido, en una posición ***r*** respecto de cualquier origen *O*, por el que puede pasar un eje sobre el cual se produce la rotación del cuerpo rígido, al producto vectorial entre la posición ***r*** y la fuerza aplicada ***F***, por la siguiente expresión:

El *torque* es una magnitud vectorial, si α es el ángulo entre ***r*** y ***F,*** su valor numérico, por definición del producto vectorial, es:

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

$$\boxed{\tau = r(F sen\,\alpha)}$$

su dirección es siempre perpendicular al plano de los vectores ***r*** y ***F***, cuyo diagrama vectorial se muestra en la figura 2, su sentido esta dado por la regla del producto vectorial, la regla del sentido de avance del tornillo o la regla de la mano derecha. En la regla de la mano derecha los cuatro dedos de la mano derecha apuntan a lo largo de ***r*** y luego se giran hacia ***F*** a través del ángulo α, la dirección del pulgar derecho estirado da la dirección del torque y en general de cualquier producto vectorial.

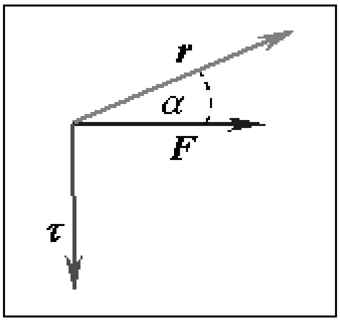


Figura 2.

Por convención se considera el torque positivo (negativo) si la rotación que produciría la fuerza es en sentido antihorario (horario); esto se ilustra en la figura 3. La unidad de medida del torque en el SI es el *Nm* (igual que para trabajo, pero no se llama joule).

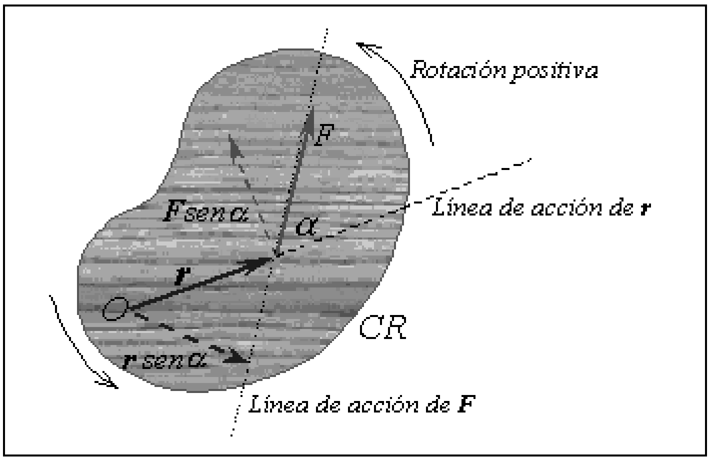


Figura 3

El torque de una fuerza depende de la magnitud y dirección de ***F*** y de su punto de aplicación respecto a un origen *O*. Si la fuerza ***F*** pasa por *O*, ***r*** = 0 y el torque es cero. Si α = 0 o 180º, es decir, ***F*** está sobre la línea de acción de ***r***, *Fsen*α = 0 y el torque es cero. *F sen*α es la componente de ***F*** perpendicular a ***r***, sólo esta componente realiza torque, y se le puede llamar $F_\perp$. De la figura

6.3 también se ve que $r^{\perp} = r\ sen\alpha$ es la distancia perpendicular desde el eje de rotación a la línea de acción de la fuerza, a $r^{\perp}$ se le llama *brazo de palanca* de ***F***. Entonces, la magnitud del torque se puede escribir como:

$$\tau = r\left(Fsen\alpha\right) = F\left(rsen\alpha\right) = rF_{\perp} = r_{\perp}F$$

Ejemplo 1: *Calcular el torque neto por los puntos A y por B en el sistema de la figura 4, donde F1 = 10 N, F2 = 5 N, F3 = 15 N, a = 50 cm, b = 1 m.*

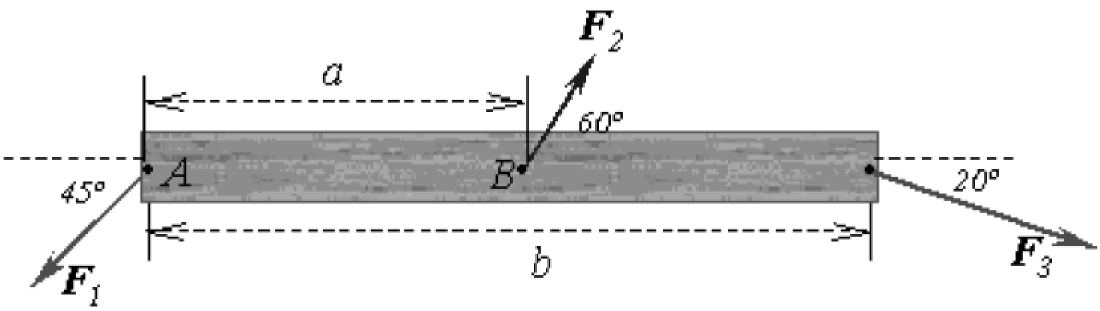


Figura 4

Solución: el torque neto es la suma de los torques realizados por cada fuerza.

Los puntos *A* y *B* se consideran ejes de rotación en forma independiente, por supuesto no simultáneamente, por lo tanto los torque se calculan en forma separada en cada punto.

Para rotación en torno al punto A, considerando el sentido de la rotación que produce cada fuerza, lo que le da el signo al torque, se tiene:

τ A = F1 r1 sen45 + F2 r2 sen60 - F3 r3 sen20
los valores de las distancias son: *r1 =0, r2 = a = 0.5 m, r3 = b = 1 m.*
τ A = (10)(0) sen45 + (5)(0.5) sen60 – (15)(1) sen20 = -3 Nm

Para rotación en torno al punto B, considerando el sentido de la rotación:

τ B =+ F1 r1 sen45 + F2 r2 sen60 - F3 r3 sen20

ahora los valores de las distancias son:

r1 = a = 0.5 m, r2 =0, r3 = b-a = 0.5 m.
τ B = (10)(0.5) sen45 + (5)(0) sen60 – (15)(0.5) sen20 = 1 Nm

EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO.

Por definición una partícula puede tener solo movimiento de traslación. Si la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero, la partícula está moviéndose con velocidad constante o está en reposo; en este último caso se dice que está en equilibrio estático. Pero el movimiento de un cuerpo rígido en general es de traslación y de rotación. En este caso, si la resultante tanto de las fuerzas como de los torques que actúan sobre el cuerpo rígido es cero, este no tendrá aceleración lineal ni aceleración angular, y si está en reposo, estará en equilibrio estático. La rama de la mecánica que estudia el equilibrio estático de los cuerpos se llama estática.

Para que un cuerpo rígido este en equilibrio estático se deben cumplir dos requisitos simultáneamente, llamados condiciones de equilibrio. La primera condición de equilibrio es la Primera Ley de Newton, que garantiza el equilibrio de traslación. La segunda condición de equilibrio, corresponde al equilibrio de rotación, se enuncia de la siguiente forma: “la suma vectorial de todos los torques externos que actúan sobre un cuerpo rígido alrededor de cualquier origen es cero”. Esto se traduce en las siguientes dos ecuaciones, consideradas como las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido:

1ª condición de equilibrio: $\boxed{\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = 0}$

Figura 5

2ª condición de equilibrio: $\boxed{\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \cdots + \vec{\tau}_n = 0}$

Figura 6

Como estas ecuaciones vectoriales son equivalentes a seis ecuaciones escalares, resulta un sistema final de ecuaciones con seis incógnitas, por lo que limitaremos el análisis a situaciones donde todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido, están en el plano xy, donde también obviamente se encuentra r.

Con esta restricción se tiene que tratar sólo con tres ecuaciones escalares, dos de la primera condición de equilibrio y una de la segunda, entonces el sistema de ecuaciones vectorial (fig 5) y (fig 6) se reduce a las siguientes ecuaciones escalares:

$$\Sigma F_x = 0,\ \Sigma F_y = 0,\ \Sigma \tau\ O = 0$$

Cuando se tratan problemas con cuerpos rígidos se debe considerar la fuerza de gravedad o el peso del cuerpo, e incluir en los cálculos el torque producido por su peso. Para calcular el torque debido al peso, se puede considerar como si todo el peso estuviera concentrado en un solo punto, llamado centro de gravedad.

Se han preguntado alguna vez ¿por qué no se cae la Torre de Pisa?

o ¿por qué es imposible tocarte los dedos de los pies sin caerte cuando estas de pie apoyado con los talones contra la pared? ¿Por qué cuando llevas una carga pesada con una mano, extiendes y levantas el otro brazo? Para responder a esto debemos definir los conceptos de centro de masa y de centro de gravedad y su aplicación al equilibrio estático.

Centro de gravedad.

Debido a que un cuerpo es una distribución continua de masa, en cada una de sus partes actúa la fuerza de gravedad. El centro de gravedad es la posición donde se puede considerar actuando la fuerza de gravedad neta, es el punto ubicado en la posición promedio donde se concentra el peso total del cuerpo.

Para un objeto simétrico homogéneo, el centro de gravedad se encuentra en el centro geométrico, pero no para un objeto irregular.

Centro de masa.

Es la posición geométrica de un cuerpo rígido donde se puede considerar concentrada toda su masa, corresponde a la posición promedio de todas las partículas de masa que forman el cuerpo rígido. El centro de masa de cualquier objeto simétrico homogéneo, se ubica sobre un eje se simetría.

Cuando se estudia el movimiento de un cuerpo rígido se puede considerar la fuerza neta aplicada en el centro de masa y analizar el movimiento del centro de masa como si fuera una partícula. Cuando la fuerza es el peso, entonces se considera aplicado en el centro de gravedad. Para casi todos los cuerpos cerca de la superficie terrestre, el centro de masa es equivalente al centro de gravedad, ya que aquí la gravedad es prácticamente constante, esto es, si g es constante en toda la masa, el centro de gravedad coincide con el centro de masa.

Existen métodos de cálculo integral para calcular estas dos posiciones, pero aquí no las detallaremos.

Ahora se pueden responder las preguntas anteriores. Respecto a la Torre de Pisa, la respuesta a la pregunta de porque no se cae, es porque su centro de gravedad está geométricamente dentro de su base, que se llama “área de sustentación”.

Si la torre continúa inclinándose hasta que su centro de gravedad caiga fuera del área de sustentación, entonces se derrumbará. Pero se le han puesto apoyos en su base para evitar que continué inclinándose. Las otras preguntas ahora las puedes responder tu.

Para aplicar las condiciones de equilibrio, es recomendable seguir las siguientes instrucciones, que corresponde a dibujar el DCL del cuerpo rígido:

a) Aislar al cuerpo rígido del sistema con un límite imaginario.

b) Dibujar los vectores que representen las fuerzas en el punto de aplicación donde las fuerzas efectivamente actúan.

c) Elegir un sistema de coordenadas conveniente para descomponer las fuerzas, donde dibujar la componente perpendicular a la posición.

d) Elegir un eje de rotación O adecuado en el cuerpo rígido, donde se anulen los torques de (algunas) fuerzas desconocidas.

Ejemplo 2:

Una barra uniforme de longitud L y peso P está articulada en A en una pared. Un alambre fijo en la pared a una distancia D sobre la articulación, sujeta a la barra por el extremo superior, como se muestra en la figura a. El alambre permanece horizontal cuando se cuelga un cuerpo de peso p en el extremo superior de la barra.

Calcular la tensión del alambre y la fuerza de reacción en la articulación de la barra.

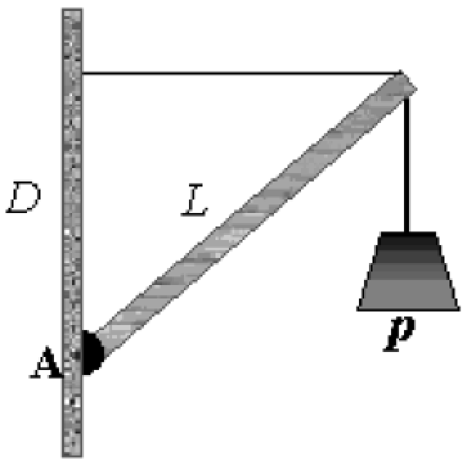


Figura a)

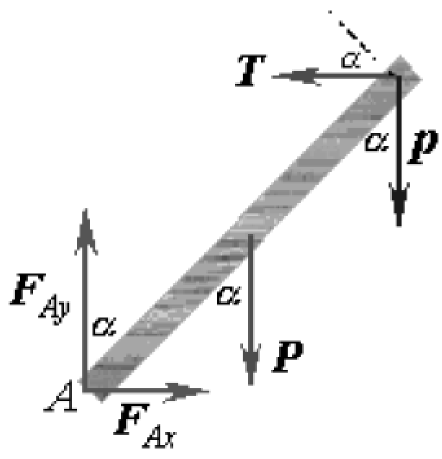


Figura b)

Solución:
Se elige como eje de rotación la articulación de la barra en la pared, en el punto A, se identifican las fuerzas que actúan sobre la barra, se dibuja el DCL de la barra (figura b) y se aplican las condiciones de equilibrio.

1ª condición de equilibrio:

$\Sigma F = 0 \Rightarrow \Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$

eje x: $F_{Ax} - T = 0$ (1)

eje y: $F_{Ay} - P - p = 0$ (2)

2ª condición de equilibrio:

$\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow \tau_T + \tau_p + \tau_P = 0$

$+T \cos\alpha\, L - p \operatorname{sen}\alpha\, L - P \operatorname{sen}\alpha\, (L/2) = 0$ (3)

De la geometría de la figura se obtienen *sen* α y *cos* α en términos de los valores conocidos *D* y *L*:

$$\cos\alpha = \frac{D}{L}, \quad sen\alpha = \frac{\sqrt{L^2 - D^2}}{L}$$

que se reemplazan en (3) , luego se despeja T:

$$T = \frac{(p + P/2)\sqrt{L^2 - D^2}}{D}$$

Ahora se calculan *FAx* y *FAy* de las ecuaciones (1) y (2).

$$\text{De (1):} \qquad F_{Ax} = T = \frac{(p + P/2)\sqrt{L^2 - D^2}}{D}$$

$$\text{De (2):} \qquad F_{Ay} = P + p$$